Encontrar o Número e com Cálculo Infinitesimal Básico (sem a Série de Taylor) e Combinatória

João Miguel Correia Faria

22 de Outubro de 2014

Uma questão fundamental do Cálculo é saber se existe uma função que descreva a sua própria variação. Intuitivamente, parece estranho que, por exemplo, a posição possa ser *igual* à velocidade, e à aceleração, etc., *ad infinitum.* No entanto, existe uma função que descreve a sua própria variação.

Considerando as funções seguintes:

$$\begin{aligned}
&\Delta 2^x = 2^{x+\Delta x} - 2^x = 2^x \left(2^{\Delta x} - 1\right)\\
&\frac{\mathrm{d}2^x}{\mathrm{d}x} = \operatorname{st} \frac{2^x \left(2^{\,\mathrm{d}x} - 1\right)}{\mathrm{d}x} = 2^x \operatorname{st} \frac{2^{\,\mathrm{d}x} - 1}{\mathrm{d}x} \simeq 2^x \times 0{,}693\\
&\frac{\mathrm{d}3^x}{\mathrm{d}x} \simeq 3^x \times 1{,}099
\end{aligned}$$

As suas derivadas são, com efeito, praticamente a mesma função, mas com uma «constante irritante» ao lado. Visto que esta constante para 3^x é superior a 1, e para 2^x é inferior, seria de esperar que o número procurado esteja algures entre esses valores.

Logo, a questão é: existe algum número e (dado ε infinitesimal) para o qual a constante irritante $\operatorname{st} \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ seja 1? Vejamos:

$$1 = \operatorname{st} \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \iff e^\varepsilon - 1 \approx \varepsilon \iff e = \operatorname{st}\,(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon} \tag{1}$$

Chamamos a este número e porque muitas das suas aplicações e propriedades foram descobertas pelo matemático Leonhard ***E***uler, e com o expoente variável x constitui a principal função ***e***xponencial. É uma das poucas constantes comprovadamente transcendentes conhecidas, e tal como outra dessas constantes, π, aparece muitas vezes em fórmulas com as quais parece não estar relacionado.

Um somatório seria uma melhor definição: as aproximações com $(1+a)^{1/a}$ requerem valores de a muito pequenos (demoram imenso a convergir) para serem minimamente satisfatórias, e não são muito apelativas. Para expandir a expressão em (1), é necessário ter como expoente um número inteiro (ou que funcione como um): considerando um hiper-inteiro $H = {}^1\!/\!_\varepsilon$,

$$e = \operatorname{st}\,(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon} = \operatorname{st}\left(1 + \frac{1}{H}\right)^H \tag{2}$$

é possível expandir a expressão

$$\left(1+\frac{1}{H}\right)^H = \sum_{i=0}^{H}\left[\binom{H}{i}1^{\cancel{H-i}}\left(\frac{1}{H}\right)^i\right] = \sum_{i=0}^{H}\frac{H!}{(H-i)!\,i!\,H^i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{H}\frac{H(H-1)(H-2)\cdots(H-i+1)\cancel{(H-i)!}}{\cancel{(H-i)!}\,i!\,H^i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{H}\frac{{}_H\mathrm{P}_i}{i!\,H^i} = \sum_{i=0}^{H}\left[\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i}\left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} H^{j-i}\right)\right] \tag{3}$$

onde ${}_x\mathrm{P}_n$ é o factorial decrescente ou símbolo de Pochhammer, e $\left[{a \atop b}\right]$ se refere aos números de Stirling da 1ª espécie com sinal. Cortar $i!$ na fração vai dar ao mesmo, mas é mais complicado ficar com $(H-i)!$, o que seria um pouco como fazer a soma ao contrário.

Há que notar que para os propósitos da Combinatória, o factorial 0! é definido como 1. Isto deve-se também ao valor respetivo da função que estende o factorial para os números complexos, $\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; e ao facto de se considerar 0! um «produto vazio» (cujo valor é a identidade da multiplicação, 1), entre outras propriedades curiosas.

Este somatório ainda não é simples mas pode ser consideravelmente simplificado, visto que a maior parte dos termos são infinitesimais, e que o resultado sem a função da parte real ($\mathrm{st} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$) os incluiria.

Analisemos primeiro o valor da soma interna, passando $i!$ (dependente do índice, abaixo muda-se o índice i para um n) para dentro da mesma.

$$\forall n \in \mathbb{R}^*, \quad \sum_{j=0}^{n}\left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\frac{H^{j-n}}{n!}\right) = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}\frac{H^{\cancel{0}-n}}{n!} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}\frac{H^{1-n}}{n!} +$$
$$+ \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}\frac{H^{2-n}}{n!} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}\frac{H^{(\cancel{n}-1)\cancel{-n}}}{n!} + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}\frac{\cancel{H^{n-n}}}{n!} =$$
$$= T_0(n) + T_1(n) + T_2(n) + \cdots \tag{4}$$

onde $T_k(n)$ é o k-ésimo termo da soma.

Podemos definir $T_k(n)$:

$$T_0(n) = \frac{1}{n!}$$
$$T_1(n) = \frac{\left[{n \atop n-1}\right]}{n!\,H} = \frac{n-n^2}{2} \times \frac{1}{n!\,H} =$$
$$= -\frac{\cancel{n(n-1)}}{2\cancel{n(n-1)}(n-2)!\,H} = -\frac{1}{2(n-2)!\,H} \tag{5}$$
$$\forall k \in \mathbb{Z},\ T_k(n) = \frac{\left[{n \atop n-k}\right]}{n!\,H^k} \tag{6}$$

$T_k(n)$ é portanto sempre infinitesimal para $k \geq 1$, assim como a soma do mesmo para todo o n real ou hiper-inteiro, visto que o denominador $2(n-2)!H$ em (5) aumenta factorialmente (ainda mais rápido que exponencialmente) para um aumento linear em n.

Testes semelhantes podem ser aplicados para os outros termos (expressão geral em (6)), que serão ainda mais certamente menores que o valor respetivo (para o mesmo n) de $T_1(n)$; visto que o denominador estará pelo menos duas ordens de grandeza infinitas ($H^m\times,\ k \geq m \geq 2$) acima do numerador.

Como muitos dos valores (na verdade, todos exceto T_0) no somatório interno (o de índice j) são menosprezáveis (somados H vezes não resultam em números reais), é-nos agora possível simplificar a expressão com o valor de e.

$$e \overset{(2)}{=} \mathrm{st}\left[\left(1+\frac{1}{H}\right)^{H}\right] \overset{(3)}{=} \mathrm{st}\sum_{i=0}^{H}\frac{{}_{H}\mathrm{P}_i}{i!\,H^i} \overset{(3)}{=} \mathrm{st}\sum_{i=0}^{H}\left[\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i}\left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} H^{j-i}\right)\right] =$$

$$\overset{(4)}{=} \mathrm{st}\sum_{i=0}^{H}\sum_{j=0}^{i} T_j(i) \overset{(6)}{=} \mathrm{st}\sum_{i=0}^{H}\sum_{j=0}^{i}\frac{\left[{i \atop i-j}\right]}{i!\,H^j} \overset{\P(6)}{=} \mathrm{st}\sum_{i=0}^{H}\left[T_0(i)+T_1(i)\right] =$$

$$\overset{\P(5)}{=} \mathrm{st}\sum_{i=0}^{H}\frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\cdots$$

■ q.e.d.

Por um método semelhante; incluindo x no expoente em (2), e complicando um pouco a expansão em (3) e nas provas subsequentes; chegamos à função desejada, aquela que é a sua própria derivada, e^x. É fácil de demonstrar que esta é a função que procurávamos:

$$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\left(x^i\right)}{i!\,\mathrm{d}x} = \frac{\cancel{\mathrm{d}x^0}}{0!\,\mathrm{d}x} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cancel{i}x^{i-1}}{\cancel{i}\,(i-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^l}{l!} = e^x$$

Assim se conclui a redescoberta da função que descreve a sua própria variação, matematicamente ideal, útil desde o crescimento populacional na Biologia até ao estudo dos mais diversos modelos económicos.