Sobre o movimento de um corpo dada uma aceleração gravítica constante

João Miguel C. Faria

7 de Outubro de 2014

Resumo

Desde a antiguidade que tentamos compreender o movimento dos corpos, desde a queda de maças aos astros mais longínquos. Este pequeno artigo baseia-se na resolução do ex. 48 na pág. 638 do livro «Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach», ilustrando as mais simples potencialidades do Cáluclo na prática científica teórica.

Dada uma determinada aceleração $\vec{a}$ constante, considerando uma velocidade inicial $\vec{v}_0$, e uma posição inicial $\vec{s}_0$, o vetor posição $\vec{s}$ será:

$$\vec{s} = \iint \vec{a}\ (\mathrm{d}t)^2 = \frac{\vec{a}t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{s}_0 \tag{1}$$

Qualquer velocidade inicial $\vec{v}_0$ que faça um ângulo α com solo poderá ser representada por:

$$\vec{v}_0 = k\left(\hat{\imath}\cos\alpha + \hat{\jmath}\sin\alpha\right) \tag{2}$$

onde k é o comprimento da velocidade inicial $\vec{v}_0$, visto que, graças ao teorema fundamental da aritmética:

$$\|\vec{v}_0\| = v_0 = \sqrt{(k\cos\alpha)^2 + (k\sin\alpha)^2} = \sqrt{k^2}\,\sqrt{1} = \|k\|$$

Um corpo atinge o solo quando a componente vertical da posição $\vec{s}$ é nula. Isto é:

$$\begin{aligned}\vec{s}_y = \frac{\vec{a}_y t^2}{2} + (\vec{v}_0)_y t + \vec{s}_{0y} = \vec{0} \iff t &= \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 4 \times \dfrac{a_y}{2} \times s_{0y}}}{2 \times \dfrac{a}{2}} \\ &= \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2a_y s_{0y}}}{a_y} \end{aligned} \tag{3}$$

Se a posição inicial $\vec{s}_0$ for $\vec{0}$ (as posições diferentes podem usar um outro referencial em que sejam nulas, para simplificar) e a aceleração $\vec{a}$ só tiver componente vertical negativa (noutros casos de aceleração constante, continua a ser possível usar o seguinte rodando o referencial):

$$
\begin{aligned}
&\vdash\ \vec{s}_0 = \vec{0}\ \wedge\ \frac{\vec{a}}{a} = -\hat{\jmath} \implies && (4)\\
t &= \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{{v_{0y}}^2}}{a} \iff t = 0\ \vee\ t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{a} \impliedby \\
\vec{s} &= \frac{\vec{a}}{2} \cdot \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{a}\right)^2 + \vec{v}_0 \cdot \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{a}\right) \\
&= -\frac{(2v_0 \sin\alpha)^2}{2a} \cdot \hat{\jmath} + v_0 \cos\alpha \times \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{a}\right)\hat{\imath} + v_0 \sin\alpha \times \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{a}\right)\hat{\jmath} \\
&= \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{a} \cdot \hat{\imath} && (5)
\end{aligned}
$$

onde $t = 0$ é trivial, e por isso não é mais considerado. a_y é dependente do tempo t; mas na prática, de forma geral; é constante.

Um corpo atinge uma altura máxima quando a componente vertical da velocidade é zero. Fazendo as mesmas assunções que anterioriormente:

$$
\begin{aligned}
\max \vec{s}_y =\ & \vec{s} : \left[\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}\right]_y = \vec{v}_y = (-at + v \sin\alpha)\hat{\jmath} = \vec{0} \iff \\
t =\ & \frac{v \sin\alpha}{a} \iff \\
\max \vec{s}_y =\ & -\frac{a}{2} \cdot \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{a}\right)^2 \cdot \hat{\jmath} + v_0 \cos\alpha \times \frac{v_0 \sin\alpha}{a}\hat{\imath} \\
& + v_0 \sin\alpha \times \frac{v_0 \sin\alpha}{a} \cdot \hat{\jmath} \\
=\ & \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{a} \cdot \hat{\imath} + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2a} \cdot \hat{\jmath}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Como exmeplo prático, se se atirar uma borracha (dado que esta encontra pouca resistência do ar) diretamente para cima 5 metros, ela há de ter uma velocidade inicial (e final) de aproximadamente 36 km/h, uma corrida bem rápida (ou um azelha a conduzir).