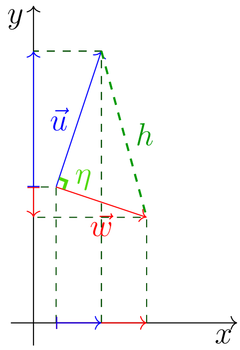
Significado do produto escalar

João Miguel Correia Faria

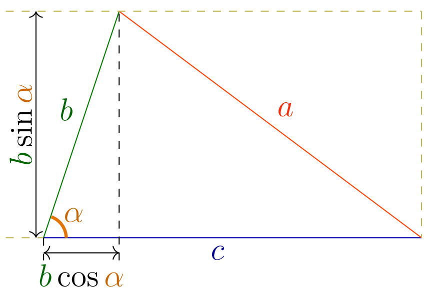
5 de Dezembro de 2014

$$\begin{aligned}
\vec{u} \perp \vec{w} \iff \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = h^2 \iff \cos\eta = 0 \\
\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = u_x^2 + u_y^2 + w_x^2 + w_y^2 \\
h^2 &= (w_y - u_y)^2 + (w_x - u_x)^2 = \\
&= w_x^2 - 2u_x w_x + u_x^2 + w_x^2 - 2u_x w_x + u_x^2 \\
\cancel{u_x^2} + \cancel{u_y^2} + \cancel{w_x^2} + \cancel{w_y^2} &= \cancel{w_x^2} - 2u_x w_x + \cancel{u_x^2} + \cancel{w_x^2} - 2u_x w_x + \cancel{u_x^2} \\
\iff 0 &= u_x w_x + u_y w_y
\end{aligned}$$



Curiosamente, com aritmética simples conseguimos testar se dois vetores são perpendiculares.[1] Mas levanta-se a questão: qual é o significado de $u_x w_x + u_y w_y$ noutros casos, em que $\eta \neq \tau/4$?[2] Para sabermos isso, temos que conseguir saber o comprimento do lado oposto a η não apenas no caso simples do ângulo reto, mas em qualquer caso; isto é, precisamos de generalizar o teorema de Pitágoras, que foi o que nos permitiu chegar a este resultado inicial.

Assim entramos no domínio da Trigonometria, à procura de algo comummente chamado «lei dos cossenos». Não se trata bem de uma lei, mas mais de um teorema, a generalização do teorema de Pitágoras.



$$\begin{aligned}
a^2 &= (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 && (1) \\
&= b^2\left[(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2\right] + c^2 \\
&\quad - 2bc\cos\alpha \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \iff && (2) \\
2bc\cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \iff \\
\cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a^2}{bc}\right) && (3)
\end{aligned}$$

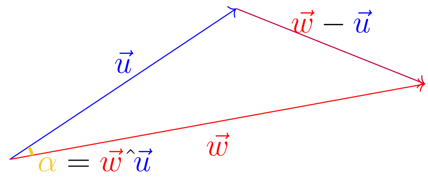
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ é a fórmula procurada; se $\alpha = \tau/4$, temos o teorema de Pitágoras original.

[1] Neste documento, não serão consideradas mais que 2 dimensões, porém, a extrapolação das fórmulas para 3 ou mais dimensões é semelhante.

[2] $\tau = 2\pi$, ver https://ayp3gd4pm4qduff3.onion/Matemática/tau.pdf e https://www.tauday.com/

Aplicando a lei dos cossenos ao estudo dos vetores, obtemos:

$$\cos(\vec{w}\,\hat{}\,\vec{u}) = \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{w}-\vec{u}\|^2}{2\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|} =$$



$$= \frac{(u_x^2 + u_y^2) + (w_x^2 + w_y^2) - ((w_x - u_x)^2 + (w_y - u_y)^2)}{2\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|} =$$

$$= \frac{(\cancel{u_x^2} + \cancel{u_y^2}) + (\cancel{w_x^2} + \cancel{w_y^2})\cancel{-}(\cancel{w_x^2}\cancel{-}\cancel{2}u_x w_x + \cancel{u_x^2} + \cancel{w_y^2}\cancel{-}\cancel{2}u_y w_y + \cancel{u_y^2})}{\cancel{2}\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|} = \frac{u_x w_x + u_y w_y}{\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|}$$

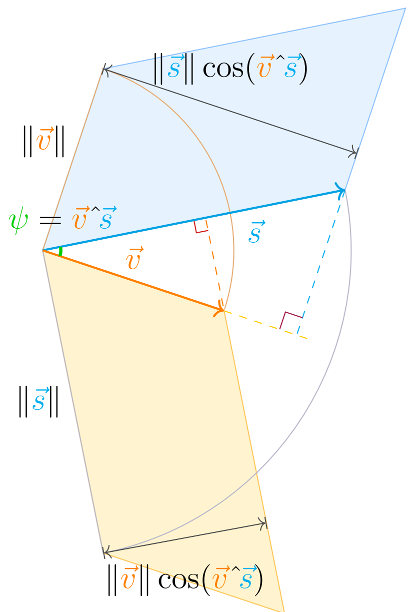
Vemos de novo o mesmo valor, $u_x w_x + u_y w_y$, não aparece por acaso, e que vale a pena defini-lo:

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = u_x w_x + u_y w_y = \sum_{(x;y)} \vec{u}\otimes\vec{w} = \|\vec{u}\|\|\vec{w}\|\cos(\vec{w}\,\hat{}\,\vec{u})$$

É uma espécie de produto, mas resulta num número (escalar), e não num vetor, matriz, tensor, etc.. Podemos chamar a este valor útil a soma do produto interno, ou produto escalar.

Este «produto escalar» ainda tem um significado geométrico, tanto pela definição geométrica que acabámos de obter como pela original, algébrica. Esta última será omitida, mas consiste na soma das áreas de retângulos com as componetes relativamente aos eixos como lados, ou seja, os retângulos formados por v_x e s_x, e v_y e s_y, respetivamente.

À direita podemos ver a representação geométrica pela definição geométrica do produto escalar: a área de um paralelogramo de lados $\vec{v}$ e $\vec{s}$. As alturas do paralelogramo são as projeções dos vetores um no outro, e por isso dependem do ângulo entre os vetores e do seu comprimento.



Deste modo, a partir do produto escalar, o ângulo entre os vetores e um vetor, é possível reconstruir o outro vetor; e como vimos acima, a partir do produto escalar e apenas os comprimentos dos vetores, podemos descobrir o ângulo.

Tudo isto confirma o caso específico que vimos anteriormente, se $\psi = \frac{\tau}{4}$, o produto escalar é 0, trata-se da área de um paralelogramo degenerado.